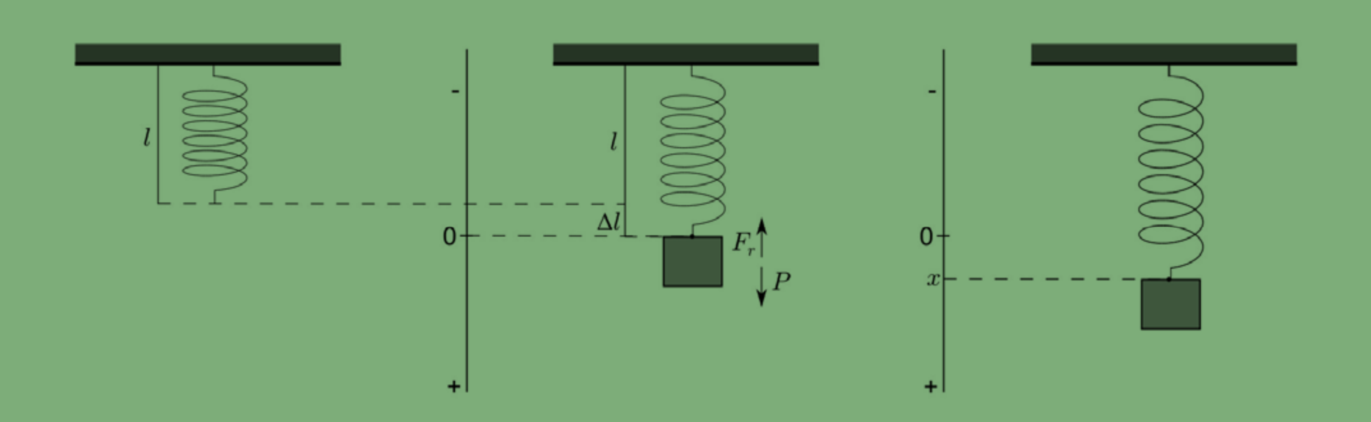
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR (II).

ALGUNAS APLICACIONES

por

M. ESTHER PATIÑO RODRÍGUEZ
PEDRO GALÁN DEL SASTRE



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-88-04

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR (II).

ALGUNAS APLICACIONES

por

M. ESTHER PATIÑO RODRÍGUEZ
PEDRO GALÁN DEL SASTRE

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

3-88-04

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior (II). Algunas aplicaciones.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 403.01 / 3-88-04
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-461-5
ISBN-13: 978-84-9728-463-9
Depósito Legal: M-15481-2013

Índice general

Ecuaciones diferenciales de orden superior. Algunas aplicaciones.

1. Sistemas masa-resorte

1.1. Movimiento libre no amortiguado

Consideremos un resorte de longitud l suspendido verticalmente de un soporte rígido. Si colgamos de él una masa m, el resorte se alargará una cantidad, llamada ***elongación***, que denotamos por Δl (véase Figura 1).

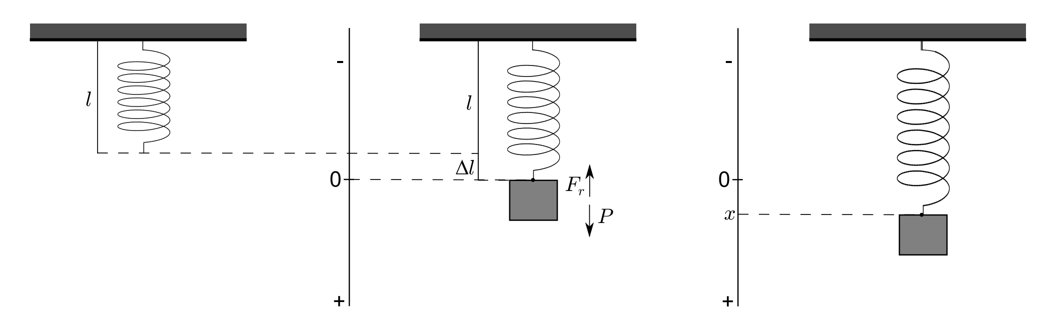


Figura 1: Sistema masa-resorte.

Las fuerzas que están actuando sobre la masa en cada momento son, por un lado, la fuerza de la gravedad, cuya magnitud es $P = mg$, donde g es la aceleración gravitatoria terrestre, y por otro, la fuerza restauradora del muelle que viene descrita por la Ley de Hooke: un resorte ejerce una fuerza restauradora opuesta al movimiento y proporcional al desplazamiento del resorte; su magnitud es $F_r = k\Delta l$, $k > 0$.

El sistema alcanza la posición de equilibrio cuando las dos fuerzas que están actuando son iguales; entonces se tiene que

$$mg = k\Delta l. \tag{1}$$

Si ahora desplazamos la masa una cantidad x hacia abajo desde su posición de equilibrio y soltamos, la fuerza restauradora será

$$F_r = k(x + \Delta l).$$

Considerando que los desplazamientos a partir de esta posición de equilibrio son positivos hacia abajo, la resultante de las fuerzas que están actuando sobre el sistema, en ausencia de

otras fuerzas, viene dada por

$$F = mg - k(x + \Delta l). \tag{2}$$

Por otro lado, la Segunda Ley de Newton establece que la fuerza neta aplicada sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración que adquiere dicho cuerpo, siendo su masa la constante de proporcionalidad. Si denotamos por $x(t)$ la posición de la masa en el instante de tiempo t contada a partir de su posición de equilibrio, para la que se tiene que $x = 0$ (ver Figura 1), esta fuerza viene expresada por

$$F = mx''(t). \tag{3}$$

Dado que ambas fuerzas, (2) y (3), son iguales,

$$mx''(t) = mg - k(x(t) + \Delta l) \tag{4}$$

y, teniendo en cuenta la expresión (1) se llega a la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$mx''(t) + kx(t) = 0. \tag{5}$$

Esta ecuación diferencial describe el ***movimiento armónico simple*** o ***movimiento libre no amortiguado***. Para resolver esta ecuación de segundo orden homogénea, obtenemos las raíces de la ecuación característica

$$m\lambda^2 + k = 0,$$

que son

$$l = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i,$$

puesto que $k > 0$. La solución general de esta ecuación diferencial vendrá dada por

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right), \tag{6}$$

que, escrita en términos de la frecuencia (número de oscilaciones por unidad de tiempo) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, queda escrita como

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t). \tag{7}$$

El movimiento descrito por la expresión (7) es un movimiento oscilatorio periódico, con amplitud constante y cuyo periodo es $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. El movimiento del sistema masa-resorte es una vibración de frecuencia constante que no depende de las condiciones iniciales, tan solo depende de k y m.

Ejemplo 1.1 *Si situamos una masa de 5 kg en un resorte, éste se alarga 10 cm. Liberamos la masa 8 cm por debajo de la posición de equilibrio. ¿Cuál es la ecuación del movimiento suponiendo un movimiento armónico simple? (Tómese el valor aproximado de $g = 10\ m/s^2$).*

De la expresión (1) obtenemos que

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{5 \cdot 1000}{10} = 500\, kg \cdot s^{-2}.$$

El *P.V.I.* que describe la dinámica del resorte, para este caso, vendrá dado por la ecuación diferencial (5) junto con las condiciones iniciales dadas, es decir,

$$\begin{cases} 5x''(t) + 500x(t) = 0, \\ x(0) = 8, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación característica, $5\lambda^2 + 500 = 0$, son

$$\lambda = \pm 10i,$$

y por tanto, la ecuación que describe el movimento es

$$x(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t). \tag{8}$$

Imponiendo las condiciones iniciales en

$$\begin{cases} x(t) &= c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t), \\ x'(t) &= -10\, c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10\, c_2 \cos(10t), \end{cases}$$

tenemos que

$$\begin{cases} 8 = x(0) = c_1, \\ 0 = x'(0) = 10c_2, \end{cases}$$

y, por tanto, las constantes c_1 y c_2 toman los valores $c_1 = 8$ y $c_2 = 0$. La solución particular única para este ejemplo viene dada por

$$x(t) = 8\cos(10t).$$

En la Figura 2 se muestra la gráfica de esta función $x(t)$, en la que se aprecia el movimiento periódico, con periodo $T = \dfrac{2\pi}{10}$ y amplitud 8.

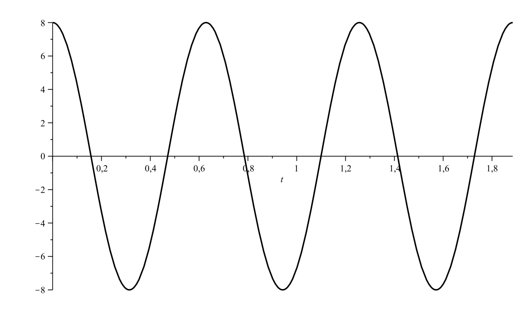


Figura 2: Movimiento libre no amortiguado.

1.2. Movimiento libre amortiguado

El caso del movimiento libre no amortiguado no es muy realista. Si suponemos, por ejemplo, que el resorte está sumergido en un fluido (aire, agua, ...), actuará sobre él una fuerza amortiguadora que es proporcional a la velocidad del cuerpo y con sentido opuesto; esto es,

$$F_a = -cx'(t),$$

donde $c > 0$ es una constante conocida como ***coeficiente de amortiguamiento***. Así, en la expresión (4) habría que considerar también este término, quedando ahora escrita como:

$$mx''(t) = mg - k(x + \Delta l) - cx'(t). \tag{9}$$

Procediendo como en el caso anterior llegamos a la siguiente ecuación diferencial que describe, en este caso, el denominado ***movimiento libre amortiguado***:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0. \tag{10}$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea. La ecuación característica se escribe como

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \tag{11}$$

cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

Dependiendo del signo de $c^2 - 4km$ distinguiremos tres casos:

(a) Si $c^2 - 4km > 0$, tendremos dos raíces reales distintas,

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

La solución de la ecuación diferencial (10) viene dada por

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{12}$$

Puesto que los valores λ_1 y λ_2 son negativos, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, es decir, la posición de la masa tiende a su posición de equilibrio. Además, se prueba fácilmente que la masa puede pasar a lo sumo una vez por su posición de equilibrio. Se dice que este sistema está ***sobreamortiguado***. Esto ocurre cuando el coeficiente de amortiguamiento, c, es grande comparado con la constante del resorte, k.

Ejemplo 1.2 *Supongamos que una masa de 1 kg alarga 5 m un resorte. Determinar la ecuación del movimiento libre amortiguado si la masa se libera dos metros por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 m/s suponiendo que la fuerza amortiguadora es 3 veces la velocidad instantánea.*

De la expresión (1) obtenemos que

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{1 \cdot 10}{5} = 2kg \cdot s^{-2}.$$

Dado que $c = 3$, el *P.V.I* para este ejemplo de movimiento libre amortiguado es

$$\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0, \\ x(0) = 2, \\ x'(0) = -3. \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación característica, $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, son

$$\lambda_1 = -1 \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = -2$$

y por tanto, la ecuación que describe el movimento viene dada por

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}. \tag{13}$$

Imponiendo las condiciones iniciales sobre

$$\begin{cases} x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}, \\ x'(t) &= -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}, \end{cases}$$

se llega al siguiente sistema de ecuaciones para c_1 y c_2:

$$\begin{cases} 2 = x(0) = c_1 + c_2, \\ -3 = x'(0) = -c_1 - 2c_2, \end{cases}$$

cuya solución es $c_1 = 1$ y $c_2 = 1$. La solución particular que describe el movimiento del sistema viene dada por

$$x(t) = e^{-t} + e^{-2t}.$$

En la Figura 3 se muestra la gráfica de $x(t)$ en la que se aprecia como la masa tiende a su posición de equilibrio.

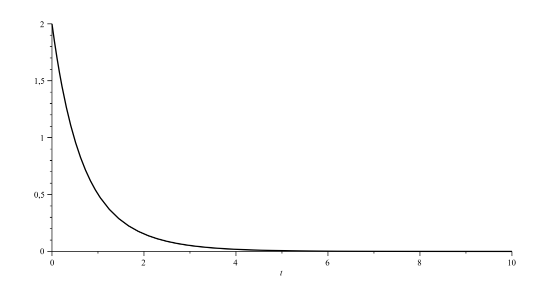


Figura 3: Sistema sobreamortiguado.

(b) Si $c^2 - 4km < 0$, tendremos como soluciones de la ecuación característica (11) dos raíces complejas conjugadas,

$$\lambda_1 = \frac{-c + i\sqrt{4km - c^2}}{2m} \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = \frac{-c - i\sqrt{4km - c^2}}{2m}.$$

La solución de la ecuación diferencial (10) viene dada ahora por

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-\frac{c}{2m}t}\cos\left(\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t\right) + c_2 e^{-\frac{c}{2m}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t\right) \\ &= e^{-\frac{c}{2m}t}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t\right)\right). \end{aligned}$$

El movimiento descrito por $x(t)$ es un movimiento oscilatorio que se va amortiguando con el tiempo ya que su amplitud, que depende de $e^{-\frac{c}{2m}t}$, tiende a cero cuando $t \to \infty$. Cuando ocurre esto, se dice que el sistema está ***subamortiguado***, y se produce cuando el coeficiente de amortiguamiento, c, es pequeño comparado con la constante del resorte, k.

Ejemplo 1.3 *Determinar la ecuación del movimiento de un sistema masa-resorte para el caso* $m = 1\,kg$, $c = 2\,N\,s/m$ *y* $k = 10\,N/m$ *suponiendo que la masa se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 3 m/s.*

El $P.V.I$ que tenemos que resolver este ejemplo, de acuerdo con la expresión (10) y las condiciones iniciales del enunciado, viene dado por

$$\left\{\begin{array}{l} x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 0, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 3. \end{array}\right.$$

Su ecuación característica asociada, $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$, tiene por raíces

$$\lambda_1 = -1 + 3i, \qquad \lambda_2 = -1 - 3i.$$

Su solución general será, por tanto,

$$x(t) = c_1 e^{-t}\cos(3t) + c_2 e^{-t}\operatorname{sen}(3t) = e^{-t}\left(c_1\cos(3t) + c_2\operatorname{sen}(3t)\right).$$

Las condiciones iniciales impuestas en

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) &=& e^{-t}\left(c_1\cos(3t) + c_2\operatorname{sen}(3t)\right), \\ x'(t) &=& -e^{-t}\left(c_1\cos(3t) + c_2\operatorname{sen}(3t)\right) + e^{-t}\left(-3c_1\operatorname{sen}(3t) + 3c_2\cos(3t)\right), \end{array}\right.$$

permiten llegar al siguiente sistema de ecuaciones para c_1 y c_2:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} 0 &=& x(0) &=& c_1, \\ 3 &=& x'(0) &=& -c_1 + 3c_2, \end{array}\right.$$

de donde $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$. La solución particular que describe el movimiento del sistema se escribe, entonces, como

$$x(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(3t).$$

La Figura 4 muestra la gráfica de $x(t)$. Nótese que el movimiento es oscilatorio en torno a la posición de equilibrio con amplitudes cada vez menores que tienden a cero. Cabe destacar que este comportamiento no depende de las condiciones iniciales impuestas.

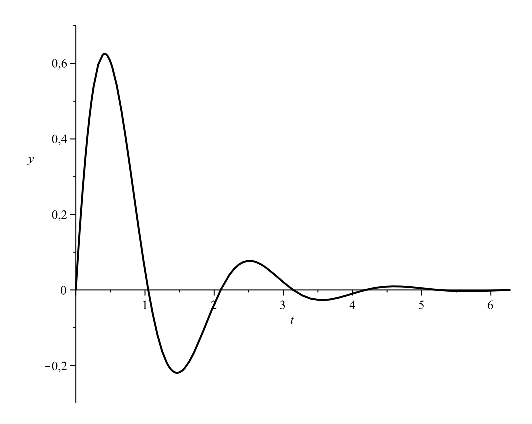


Figura 4: Sistema subamortiguado.

(c) Si $c^2 - 4km = 0$, tendremos como solución de la ecuación característica (11) una raíz real doble, $\lambda = -\dfrac{c}{2m}$. En este caso, la solución de (10) viene dada por

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} = e^{\lambda t}\left(c_1 + c_2 t\right). \tag{14}$$

El valor de λ es negativo, y por tanto, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. De la expresión (14) se deduce, además, que la masa no podría pasar más de una vez por su posición de equilibrio. Este sistema se dice que está ***críticamente amortiguado*** ya que una pequeña variación en la fuerza de amortiguamiento o en la masa haría que el sistema estuviese sobreamortiguado o subamortiguado.

Ejemplo 1.4 *Una masa de 2 kg se sujeta a un resorte cuya constante es $k = 2\,N/m$. Supongamos que sobre el sistema está actuando una fuerza amortiguadora que es igual a 4 veces la velocidad instantánea. Determinar la ecuación del movimiento si la masa se libera 1 m por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 1 m/s.*

El $P.V.I$ que describe el movimiento del sistema masa-resorte en este caso será

$$\left\{\begin{array}{l} 2x''(t) + 4x'(t) + 2x(t) = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 1. \end{array}\right.$$

Su ecuación característica, $2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$, tiene por solución $\lambda = -1$ doble, y por tanto, la solución general de la ecuación diferencial vendrá dada por

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} = e^{-t}\left(c_1 + t c_2\right).$$

Imponiendo las condiciones iniciales en

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & e^{-t}\left(c_1 + t c_2\right), \\ x'(t) & = & -e^{-t}\left(c_1 + t c_2\right) + e^{-t} c_2, \end{array}\right.$$

llegamos al siguiente sistema de ecuaciones para c_1 y c_2:

$$\begin{cases} 1 = x(0) = c_1, \\ 1 = x'(0) = -c_1 + c_2, \end{cases}$$

de donde se obtiene que $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$. La solución particular que describe el movimiento del sistema se escribe, entonces, como

$$x(t) = e^{-2t}(1 + 2t).$$

En la Figura 5 se representa la gráfica de $x(t)$.

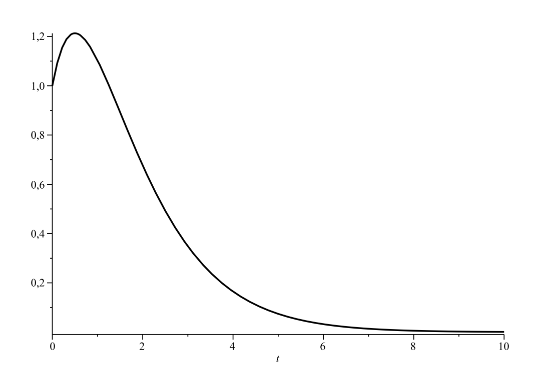


Figura 5: Sistema críticamente amortiguado.

Ejemplo 1.5 *Consideremos el mismo sistema masa-resorte del ejemplo anterior con las condiciones iniciales dadas por* $x(0) = 1$ *y* $x'(0) = -3$.

En este caso, la solución particular viene dada por la expresión

$$x(t) = e^{-t}(1 - 2t).$$

Podemos observar que en instante $t = 1/2$, la masa pasa por su posición de equilibrio, y sólo en ese instante (véase Figura 6).

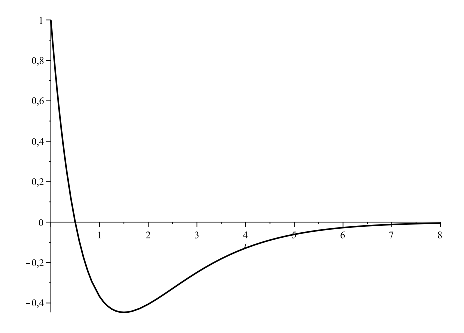


Figura 6: Sistema críticamente amortiguado.

1.3. Movimiento forzado amortiguado

Consideremos ahora que una fuerza externa, $F(t)$, está actuando sobre el sistema. Si en la expresión (9) añadimos el término correspondiente a esta fuerza, tendríamos que

$$mx''(t) = mg - k(x + \Delta l) - cx'(t) + F(t), \tag{15}$$

y, de modo análogo a los casos anteriores, llegaríamos a que la ecuación diferencial que describe el movimiento del sistema, que en este caso se denomina ***movimiento forzado***, queda escrita como

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t). \tag{16}$$

Así, tenemos una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea. Estudiaremos como caso particular fuerzas externas periódicas de la forma $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$, o bien, $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, ya que en estos casos se producen fenómenos físicos interesantes.

Ejemplo 1.6 *A un sistema masa-resorte amortiguado cuyos parámetros son $m = 1\,kg$, $c = 4\,N\,s/m$ y $k = 3\,N/m$ se le aplica una fuerza externa dada por $F(t) = 5\cos t$. Determinar la ecuación que describe el movimiento del sistema suponiendo que $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$.*

El *P. V.I.* que resuelve este ejemplo es

$$\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 5\cos t, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Primero resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada $x''_H(t) + 4x'_H(t) + 3x_H(t) = 0$. Su ecuación característica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

tiene como soluciones $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -3$, por lo que la solución general de esta ecuación viene dada por

$$x_H(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}.$$

Para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial completa aplicaremos el método de los coeficientes indeterminados. Ensayamos, entonces, con una solución particular de la forma

$$x_P(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t$$

de modo que

$$\begin{aligned} x'_P(t) &= -A\operatorname{sen} t + B\cos t, \\ x''_P(t) &= -A\cos t - B\operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Sustituimos ahora las expresiones de $x_P(t)$, $x'_P(t)$ y $x''_P(t)$ en la expresión de la ecuación diferencial completa y tenemos

$$-A\cos t - B\operatorname{sen} t + 4(-A\operatorname{sen} t + B\cos t) + 3(A\cos t + B\operatorname{sen} t) = 5\cos t.$$

Operando e igualando los coeficientes de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ llegamos al siguiente sistema de ecuaciones en A y B:

$$\begin{cases} 2A + 4B &= 5, \\ -4A + 2B &= 0, \end{cases}$$

cuya solución es $A = \frac{1}{2}$ y $B = 1$. Así,

$$x_P(t) = \frac{1}{2}\cos t + \operatorname{sen} t$$

y, por tanto, la solución general de la ecuación diferencial completa se escribe como

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2}\cos t + \operatorname{sen} t.$$

A continuación, para determinar los valores de c_1 y c_2 imponemos las condiciones iniciales en

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2}\cos t + \operatorname{sen} t, \\ x'(t) = -c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-3t} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \cos t, \end{cases}$$

con lo que tenemos

$$\begin{cases} 0 &= x(0) &= c_1 + c_2 + \frac{1}{2}, \\ 0 &= x'(0) &= -c_1 - 3c_2 + 1, \end{cases}$$

de donde se obtiene que $c_1 = -\frac{5}{4}$ y $c_2 = \frac{3}{4}$. La solución particular que describe el movimiento del sistema es

$$x(t) = -\frac{5}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{1}{2}\cos t + \operatorname{sen} t.$$

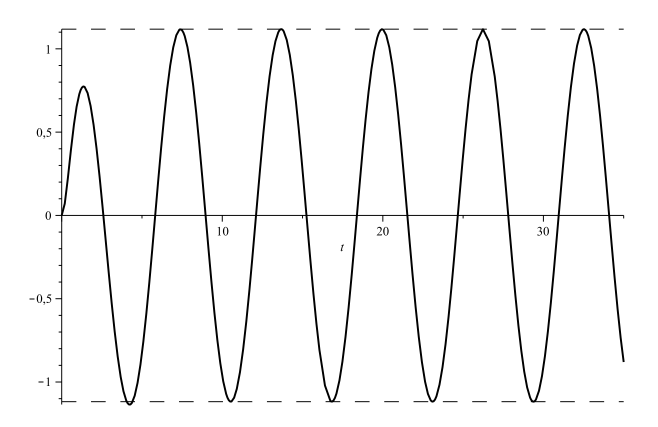


Figura 7: Movimiento forzado amortiguado.

Nótese que, según avanza el tiempo, únicamente se mantiene el movimiento oscilatorio generado por la aplicación de la fuerza externa (ver Figura 7).

1.4. Movimiento forzado no amortiguado

Este caso particular del movimiento forzado tiene especial interés ya que puede dar lugar a un fenómeno conocido como ***resonancia*** y que describiremos más adelante.

Puesto que estamos suponiendo ausencia de amortiguación, $c = 0$, la expresión (16) se escribe ahora como

$$mx''(t) + kx(t) = F(t). \tag{17}$$

Supongamos, como se comentó en el caso anterior, que la fuerza externa es periódica con una frecuencia Ω y viene dada por la expresión $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, donde $F_0 \in \mathbb{R}$. Por tanto, tendremos

$$mx''(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t). \tag{18}$$

La ecuación diferencial homogénea asociada, $mx''_H(t) + kx_H(t) = 0$, corresponde a la que describe el caso del movimiento armónico simple cuya solución escrita en términos de la frecuencia, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, venía dada por la expresión (7):

$$x_H(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t).$$

Para resolver la ecuación diferencial completa, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, ensayaremos con la solución particular

$$x_P(t) = A\cos(\Omega t) + B \operatorname{sen}(\Omega t),$$

de modo que

$$\begin{aligned} x'_P(t) &= -A\Omega \operatorname{sen}(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t), \\ x''_P(t) &= -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \operatorname{sen}(\Omega t). \end{aligned}$$

Sustituyendo $x_P(t)$ y sus derivadas en la expresión (18) se tiene

$$m\left(-A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \operatorname{sen}(\Omega t)\right) + k\left(A\cos(\Omega t) + B\operatorname{sen}(\Omega t)\right) = F_0 \cos(\Omega t).$$

Operando e igualando los coeficientes de $\cos(\Omega t)$ y $\operatorname{sen}(\Omega t)$ llegamos al sistema de ecuaciones en A y B

$$\begin{cases} A(-m\Omega^2 + k) = F_0, \\ B(-m\Omega^2 + k) = 0, \end{cases}$$

de donde se obtienen los valores $A = \dfrac{F_0}{k - m\Omega^2}$ y $B = 0$. Por tanto, el movimiento del sistema viene descrito por

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \cos(\Omega t). \tag{19}$$

Para interpretar este movimiento resulta conveniente expresar la amplitud de las oscilaciones producidas por la aplicación de la fuerza externa, $\dfrac{F_0}{k - m\Omega^2}$, en función de la frecuencia de las oscilaciones del movimiento libre, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, esto es

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t). \tag{20}$$

Nótese que este análisis sólo es válido si $\omega \neq \Omega$. Sin embargo, de (20) se puede observar que cuando $\Omega \to \omega$ la amplitud de las oscilaciones tiende a infinito, lo que da lugar al fenómeno conocido como ***resonancia*** (ver Figura 9).

Ejemplo 1.7 *Al sujetar una masa de 2 kilogramos a un resorte cuya constante es $k = 32\,N/m$, éste queda en reposo en la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$, se aplica al sistema una fuerza externa dada por $F(t) = 4\cos(2t)$. Encontrar la ecuación del movimiento en ausencia de amortiguación.*

El *P.V.I.* para este caso es

$$\left\{\begin{array}{l} 2x''(t) + 32x(t) = 4\cos(2t), \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{array}\right. \tag{21}$$

Como siempre, resolvemos primero la ecuación homogénea asociada, $2x_H''(t) + 32x_H(t) = 0$. Para ello buscamos las raíces de la ecuación característica $2\lambda^2 + 32 = 0$ que son $\lambda_1 = 4i$ y $\lambda_2 = -4i$, por lo que su solución general se escribe como

$$x_H(t) = c_1\cos(4t) + c_2\,\text{sen}(4t).$$

Suponemos ahora que una solución particular es de la forma

$$x_P(t) = A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t),$$

de modo que

$$\begin{array}{l} x_P'(t) = -2A\,\text{sen}(2t) + 2B\cos(2t), \\ x_P''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\,\text{sen}(2t). \end{array}$$

Sustituyendo las expresiones de $x_P(t)$ y $x_P''(t)$ en la ecuación diferencial completa (21),

$$2(-4A\cos(2t) - 4B\,\text{sen}(2t)) + 32(A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t)) = 4\cos(2t),$$

operando e identificando coeficientes, obtenemos que $A = \dfrac{1}{6}$ y $B = 0$. Por tanto, la solución general de la ecuación completa vendrá dada por

$$x(t) = c_1\cos(4t) + c_2\,\text{sen}(4t) + \frac{1}{6}\cos(2t).$$

Imponemos ahora las condiciones iniciales en

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = c_1\cos(4t) + c_2\,\text{sen}(4t) + \dfrac{1}{6}\cos(2t), \\ x'(t) = -4c_1\,\text{sen}(4t) + 4c_2\cos(4t) - \dfrac{1}{3}\,\text{sen}(2t), \end{array}\right.$$

esto es,

$$\left\{\begin{array}{lllll} 0 & = & x(0) & = & c_1 + \dfrac{1}{6}, \\ 0 & = & x'(0) & = & 4c_2, \end{array}\right.$$

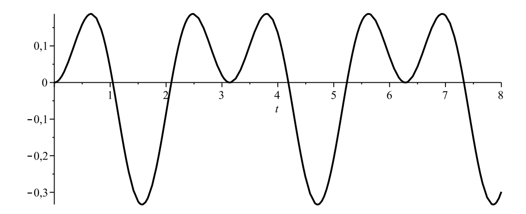


Figura 8: Movimiento forzado no amortiguado.

de donde se obtiene que $c_1 = -\dfrac{1}{6}$ y $c_2 = 0$. La solución particular que describe el movimiento del sistema es

$$x(t) = -\frac{1}{6}\cos(4t) + \frac{1}{6}\cos(2t),$$

cuya representación gráfica se muestra en la Figura 8.

Ejemplo 1.8 *Consideremos el mismo sistema masa-resorte del ejemplo anterior al que se le aplica ahora una fuerza externa dada por* $F(t) = 3\cos(4t)$.

El *P.V.I.* que hay que resolver en este caso es

$$\begin{cases} 2x''(t) + 32x(t) = 3\cos(4t), \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

para el que se tenía que la solución general de la ecuación homogénea asociada venía dada por

$$x_H(t) = c_1\cos(4t) + c_2\operatorname{sen}(4t).$$

Puesto que, en este caso, la fuerza externa, $F(t) = 3\cos(4t)$, es una función que es solución particular de la ecuación diferencial homogénea, para encontrar una solución particular de la ecuación completa ensayaremos con

$$x_P(t) = At\cos(4t) + Bt\operatorname{sen}(4t),$$

de modo que

$$\begin{aligned} x_P'(t) &= A\cos(4t) - 4At\operatorname{sen}(4t) + B\operatorname{sen}(4t) + 4Bt\cos(4t), \\ x_P''(t) &= -8A\operatorname{sen}(4t) - 16At\cos(4t) + 8B\cos(4t) - 16Bt\operatorname{sen}(4t). \end{aligned}$$

Sustituimos ahora estas funciones en la expresión (22),

$$2(-8A\operatorname{sen}(4t) - 16At\cos(4t) + 8B\cos(4t) - 16Bt\operatorname{sen}(4t)) + 32(At\cos(4t) + Bt\operatorname{sen}(4t)) = 3\cos(4t),$$

y procediendo de manera análoga a los ejemplos anteriores obtenemos los valores $A = 0$ y $B = \dfrac{3}{16}$, de modo que la solución general de la ecuación (22) resulta

$$x(t) = c_1\cos(4t) + c_2\operatorname{sen}(4t) + \frac{3}{16}t\operatorname{sen}(4t).$$

Imponemos las condiciones iniciales en

$$x(t) = c_1\cos(4t) + c_2\,\mathrm{sen}(4t) + \frac{3}{16}t\,\mathrm{sen}(4t),$$
$$x'(t) = -4c_1\,\mathrm{sen}(4t) + 4c_2\cos(4t) + \frac{3}{16}\,\mathrm{sen}(4t) + \frac{3}{4}t\cos(4t),$$

y obtenemos los valores $c_1 = c_2 = 0$. La solución particular que describe el movimiento del sistema viene dada por

$$x(t) = \frac{3}{16}t\,\mathrm{sen}(4t).$$

Como puede observarse en la Figura 9, en este caso se produce el fenómeno de resonancia, ya que la frecuencia de la fuerza externa coincide con la del movimiento oscilatorio libre.

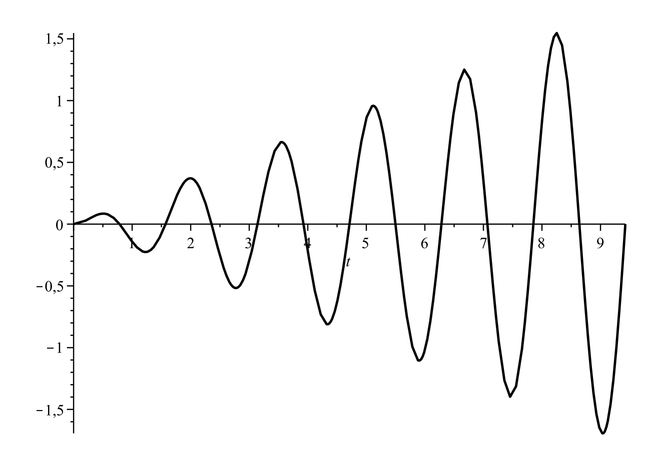


Figura 9: Movimiento forzado no amortiguado. Resonancia.

Ejercicios propuestos

1. Supongamos que una masa de 2 kg alarga 5 m un resorte. Determinar la ecuación del movimiento libre amortiguado si la masa se libera 2 m por encima de su posición de equilibrio sin velocidad inicial suponiendo que la fuerza amortiguadora es 4 veces la velocidad instantánea.

Solución: $x(t) = -2e^{-t}(\cos t + \mathrm{sen}\, t)$

2. Consideremos una masa de 5 kg sujeta a un resorte de constante $k = 20\,N/m$. Sobre este sistema está actuando una fuerza amortiguadora de constante $c = 20\,N\,s/m$. Si la masa se suelta 2 m por debajo de su posición de equilibrio con una velocidad inicial descendente de 1 m/s, determínese la ecuación del movimiento del sistema.

Solución: $x(t) = 2e^{-2t} + 5te^{-2t}$

3. Determinar la ecuación del movimiento de un sistema masa-resorte formado por una masa de 8 kg suspendida de un muelle de constante $k = 32\,N/m$ suponiendo que, en ausencia de amortiguación, actúa una fuerza externa dada por $F(t) = 16\cos(4t)$. La masa se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial ascendente de 1 m/s.

$$\text{Solución: } x(t) = \frac{1}{6}\cos(2t) - \frac{1}{2}\,\text{sen}(2t) - \frac{1}{6}\cos(4t)$$

4. A un sistema masa-resorte no amortiguado cuyos parámetros son $m = 1\,kg$ y $k = 9\,N/m$ se le aplica una fuerza externa dada por $F(t) = 6\,\text{sen}(3t)$. Determinar la ecuación que describe el movimiento del sistema suponiendo que $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$.

$$\text{Solución: } x(t) = \cos(3t) + \frac{1}{3}\,\text{sen}(3t) - t\cos(3t)$$

2. Ejercicio resuelto con Maple

Una masa de 4 kg cuelga de un muelle de constante $k = 36\,N/m$. Una fuerza externa dada por $F(t) = 3\cos\left(\frac{31}{10}t\right)$ está actuando sobre el sistema. Determinar la ecuación del movimiento del mismo suponiendo que la masa se libera desde la posición de equilibrio, sin velocidad inicial y que no está actuando ninguna fuerza amortiguadora.

```
> restart: with(plots):
```

La ecuación que modela el sistema masa-resorte es

```
> ecuacion:=4*diff(x(t),t,t)+36*x(t)=3*cos(31/10*t);
```

$$ecuacion := 4\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 36\,x(t) = 3\,\cos\left(\frac{31}{10}\,t\right)$$

Primero, resolvemos la ecuación homogénea asociada, $4x''_H(t) + 36\,x_H(t) = 0$. Para ello, obtenemos las raíces de su polinomio característico, $4\lambda^2 + 36 = 0$.

```
> solve({4*l^2+36=0},{l});
```

$$\{l = 3\,i\},\ \{l = -3\,i\}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea tiene como expresión

```
> xH:=t->c1*cos(3*t)+c2*sin(3*t);
```

$$xH := t \mapsto c1\,\cos(3\,t) + c2\,\sin(3\,t)$$

Para encontrar una solución particular de la ecuación completa ensayamos con $xP(t) = A\cos\left(\frac{31}{10}t\right) + B\sin\left(\frac{31}{10}t\right)$

```
> xP:=t->A*cos(31/10*t)+B*sin(31/10*t);
```

$$xP := t \mapsto A\cos\left(\frac{31}{10}\,t\right) + B\sin\left(\frac{31}{10}\,t\right)$$

Sustituimos $x_P(t)$ en la ecuación diferencial completa

```
> 4*diff(xP(t),t,t)+36*xP(t)=3*sin(31/10)*t;
```

$$-\frac{61}{25}\,A\cos\left(\frac{31}{10}\,t\right) - \frac{61}{25}\,B\sin\left(\frac{31}{10}\,t\right) = 3\,\sin\left(\frac{31}{10}\right)t$$

y obtenemos las constantes A y B igualando coeficientes

```
> solve({-(61/25)*A=0,-(61/25)*B=3},{A,B});
```

$$\left\{A = 0, B = -\frac{75}{61}\right\}$$

La solución general de la completa viene dada por

```
> xg:=t->c1*cos(3*t)+c2*sin(3*t)-75/61*cos(31/10*t);
```

$$xg := t \mapsto c1 \cos(3\,t) + c2 \sin(3\,t) - \frac{75}{61} \cos\left(\frac{31}{10}\,t\right)$$

Determinamos, ahora, el valor de las constantes $c1$ y $c2$ imponiendo las condiciones iniciales; antes tenemos que obtener la expresión de $x'(t)$

```
> diff(xg(t),t);
```

$$-3\,c1 \sin(3\,t) + 3\,c2 \cos(3\,t) + \frac{465}{122} \sin\left(\frac{31}{10}\,t\right)$$

```
> dxg:=t->-3*c1*sin(3*t)+3*c2*cos(3*t)+(465/122)*sin((31/10)*t);
```

$$dxg := t \mapsto -3\,c1 \sin(3\,t) + 3\,c2 \cos(3\,t) + \frac{465}{122} \sin\left(\frac{31}{10}\,t\right)$$

```
> solve({xg(0)=0,dxg(0)=0},{c1,c2});
```

$$\left\{c1 = \frac{75}{61}, c2 = 0\right\}$$

La expresión de la solución particular que describe el movimiento del sistema masa-resorte es:

```
> x:=t->75/61*cos(3*t)-75/61*cos(31/10*t);
```

$$x := t \mapsto \frac{75}{61} \cos(3\,t) - \frac{75}{61} \cos\left(\frac{31}{10}\,t\right)$$

```
> plot(x(t),t=0..40*Pi,color=black,thickness=1);
```

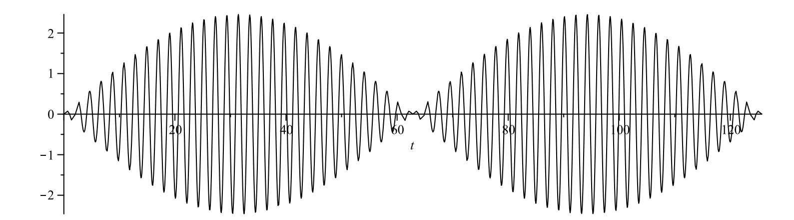


Figura 10: Fenómeno de pulsación.

Este fenómeno, conocido como ***pulsación***, (véase Figura 10) se produce cuando la frecuencia de las oscilaciones libres y la de las de la fuerza externa son casi iguales, esto es, $\omega \approx \Omega$, (véase expresión (20)). La función

$$x(t) = \frac{75}{61}\cos(3t) - \frac{75}{61}\cos\left(\frac{31}{10}t\right)$$

se puede expresar como

$$x(t) = \frac{150}{61}\,\text{sen}\left(\frac{61}{20}t\right)\text{sen}\left(\frac{1}{20}t\right),$$

(tras aplicar equivalencias trigonométricas). Se observa como la amplitud de este movimiento oscilatorio, que viene dado por el término $\frac{150}{61} \operatorname{sen}\left(\frac{61}{20}t\right)$, depende del tiempo de manera periódica, puesto que la solución posee dos frecuencias no proporcionales.

3. Deflexión de una viga

En la construcción de gran parte de las estructuras se utilizan vigas. Estas vigas sufren deformaciones que pueden ser debidas a su propio peso o a la acción de fuerzas externas. El cálculo de los valores que representan estas deformaciones es de gran importancia ya sea para determinarlos en puntos específicos a lo largo del eje de la viga o para comprobar que no exceden los límites permitidos.

Supongamos una viga horizontal, homogénea, cuya sección transversal es uniforme en toda su longitud. En estas condiciones, su ***eje de simetría*** (curva que une los centroides de las secciones transversales de la viga en ausencia de cargas, incluida la de su propio peso), es una recta. La curva que describe la deformación que experimenta la viga (su desviación respecto al eje de simetría) al aplicar una carga sobre ella se conoce como ***curva de deflexión*** o ***curva elástica*** (ver Figura 11).

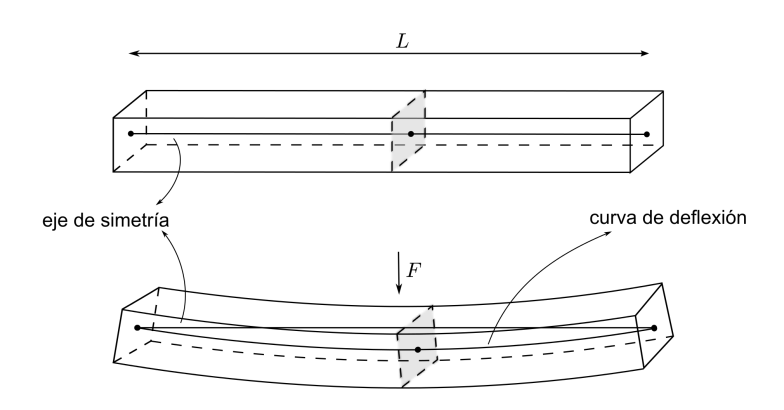


Figura 11: Eje de simetría. Curva de deflexión.

La expresión analítica de esta curva se podrá determinar, como veremos, a partir de una ecuación diferencial lineal de cuarto orden. En este caso, habrá que resolver un ***problema de contorno*** o ***problema con valores en la frontera***, esto es, la solución particular se obtendrá imponiendo condiciones de la función o alguna de sus derivadas en puntos diferentes. Estas condiciones de contorno dependerán de cómo esté apoyada la viga, según se indicará más adelante.

Consideremos una viga homogénea de longitud L a la que se le aplica una carga en un plano vertical en el que está contenido el eje de simetría (ver Figura 11). Supongamos que el eje OX lleva la dirección del eje de simetría y sea $u(x)$ la función que describe la curva de deflexión, es decir, la función que en cada punto x proporciona los valores de la deflexión, que supondremos positiva hacia abajo. En estas condiciones, vamos a obtener la ecuación diferencial lineal que permitirá obtener la expresión analítica de $u(x)$.

En Teoría de Elasticidad se muestra que la relación entre el ***momento de flexión*** o ***momento flector*** en cada punto x, $M(x)$, y la ***carga por unidad de longitud***, $\omega(x)$, viene dada por

$$M''(x) = -\omega(x). \tag{23}$$

A su vez, se tiene que, $M(x)$ es proporcional a la curvatura de la curva elástica, $k(x)$, esto es,

$$M(x) = -EIk(x), \tag{24}$$

donde E es el ***módulo de Young*** del material de la viga e I es el ***momento de inercia*** de una sección transversal de la viga respecto del eje neutro (ver Figura 12). Al producto EI se le conoce como ***rigidez a flexión de la viga***. Ambos parámetros, E e I, los suponemos constantes.

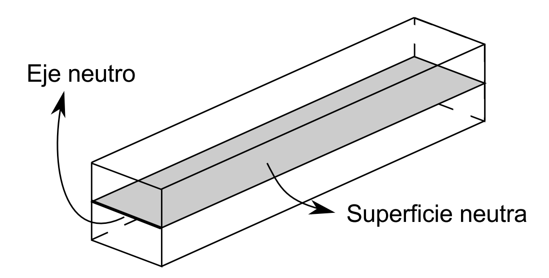


Figura 12: Eje neutro.

A partir de estas dos expresiones, (23) y (24), se tiene que

$$\omega(x) = EIk''(x). \tag{25}$$

Por otro lado, se sabe que la expresión de la curvatura de una función $u(x)$ es

$$k(x) = \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}}.$$

Puesto que los valores de $u(x)$ y $u'(x)$ son muy pequeños en las estructuras más comunes, podemos despreciar $u'(x)^2$ y, por tanto, aproximar la función curvatura por

$$k(x) \approx u''(x), \tag{26}$$

de modo que la expresión (25) quedaría escrita como

$$EIu^{IV}(x) = \omega(x), \tag{27}$$

siendo ésta la ecuación diferencial lineal de cuarto orden cuya resolución proporciona la expresión analítica de la curva de deflexión de la viga.

Como se indicó anteriormente, las condiciones de contorno van a depender de cómo estén físicamente los extremos de la viga. Puede ocurrir que la viga esté empotrada en ambos extremos, en voladizo (empotrada en un extremo y libre en el otro), apoyada en ambos extremos o empotrada en un extremo y apoyada en otro (ver Figura 13).

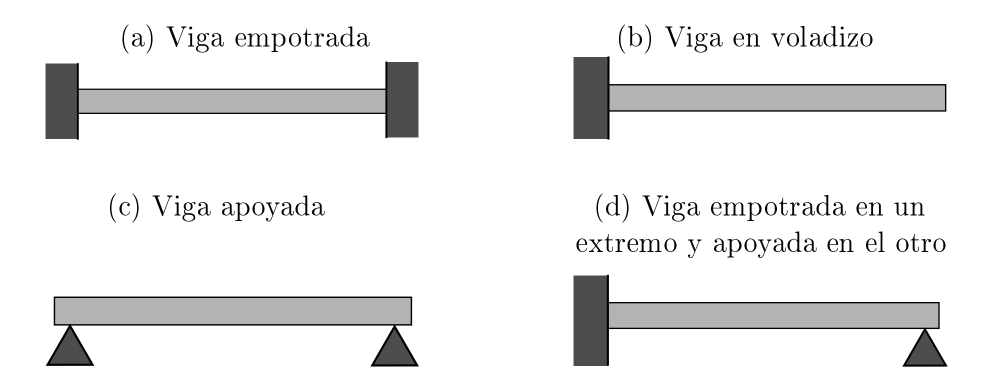


Figura 13: Apoyos en vigas.

(a) Extremo empotrado

Cuando uno de los extremos de la viga está empotrado, se verifica que en él no hay desplazamiento, es decir,

$$u(x) = 0,$$

y además, la curva de deflexión en ese punto es tangente al eje OX, es decir,

$$u'(x) = 0.$$

Suponiendo que el extremo de la viga que está empotrado corresponde al valor $x = x_0$, en este caso, las condiciones de contorno para ese punto serían

$$\begin{cases} u(x_0) = 0, \\ u'(x_0) = 0. \end{cases}$$

(b) Extremo apoyado

Cuando un extremo está apoyado, se verifica que en ese extremo, de manera análoga al caso anterior,

$$u(x) = 0.$$

Además, en este punto el momento flector es cero, esto es, $M(x) = 0$. Teniendo en cuenta la expresión (24) esto es equivalente a que $k(x) = 0$ y según la expresión (26) podemos decir que

$$u''(x) = 0.$$

Por tanto, en este caso, las condiciones de contorno en el extremo apoyado $x = x_0$ son

$$\begin{cases} u(x_0) = 0, \\ u''(x_0) = 0. \end{cases}$$

(c) Extremo libre

En el extremo libre, el momento flector es cero; es decir,

$$u''(x) = 0,$$

y el esfuerzo cortante, $V(x) = M'(x)$, también es cero, con lo que

$$u'''(x) = 0.$$

Por tanto, en este caso, las condiciones de contorno en el extremo libre $x = x_0$ son

$$\begin{cases} u''(x_0) = 0, \\ u'''(x_0) = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 3.1 *Calcular la deflexión de una viga de longitud L empotrada en ambos extremos si una carga ω_0 está distribuida de modo uniforme a lo largo de su longitud. Determinar también la ley del momento flector y el esfuerzo cortante.*

En este caso se tiene que

$$\omega(x) = \omega_0, \qquad \forall x \in [0, L].$$

El problema de contorno que hay que resolver es

$$\begin{cases} EIu^{IV}(x) = \omega_0, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(L) = u'(L) = 0. \end{cases}$$

La ecuación diferencial escrita como $u^{IV}(x) = \dfrac{\omega_0}{EI}$ se resuelve de manera inmediata integrándola cuatro veces; esto es,

$$\begin{aligned} u'''(x) &= \frac{\omega_0}{EI}x + A, \\ u''(x) &= \frac{\omega_0}{EI}\frac{x^2}{2} + Ax + B, \\ u'(x) &= \frac{\omega_0}{EI}\frac{x^3}{6} + \frac{Ax^2}{2} + Bx + C, \\ u(x) &= \frac{\omega_0}{EI}\frac{x^4}{24} + \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + Cx + D. \end{aligned}$$

Las constantes A, B, C y D se obtienen imponiendo las condiciones de contorno dadas anteriormente:

$$\begin{aligned} u(0) = 0 &\Leftrightarrow D = 0, \\ u'(0) = 0 &\Leftrightarrow C = 0, \\ u(L) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\omega_0 L^4}{24EI} + \frac{AL^3}{6} + \frac{B^2}{2} = 0, \\ u'(L) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\omega_0 L^3}{6EI} + \frac{AL^2}{2} + BL = 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$A = -\frac{\omega_0 L}{2EI}, \qquad B = \frac{\omega_0 L^2}{12EI}, \qquad C = 0, \qquad D = 0.$$

Por tanto, la curva de deflexión viene definida por la función

$$u(x) = \frac{\omega_0}{24EI}x^4 - \frac{\omega_0 L}{12EI}x^3 + \frac{\omega_0 L^2}{24EI}x^2.$$

Figura 14: Curva de deflexión para $\omega = 1$, $EI = 2$ y $L = 1$.

El momento flector, $M(x) = -EIu''(x)$ vendrá dado por

$$M(x) = -\frac{\omega_0}{2}x^2 + \frac{\omega_0 L}{2}x - \frac{\omega_0 L^2}{12}.$$

Los valores $M(0) = M(L) = -\frac{\omega_0 L^2}{12}$ se denominan ***momentos de empotramiento*** y son de gran importancia en muchos métodos de análisis de estructuras.

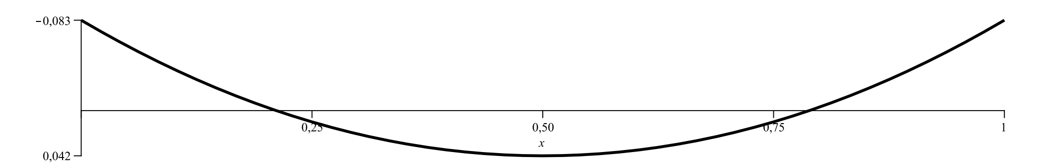


Figura 15: Momento flector para $\omega = 1$, $EI = 2$ y $L = 1$.

Y por último, el esfuerzo cortante será $V(x) = M'(x) = -\omega_0 x + \frac{\omega_0 L}{2}$.

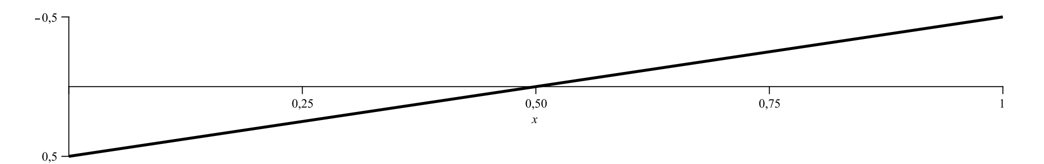


Figura 16: Esfuerzo cortante para $\omega = 1$, $EI = 2$ y $L = 1$.

Ejercicios propuestos

1. Calcular la deflexión de una viga de 1 metro de longitud empotrada en el extremo izquierdo y libre en el derecho, si una carga ω_0 está distribuida de modo uniforme a lo largo de su longitud.

$$\text{Solución: } u(x) = \frac{\omega_0}{24EI}x^4 - \frac{\omega_0}{6EI}x^3 + \frac{\omega_0}{4EI}x^2$$

2. Calcular la deflexión de una viga de 1 metro de longitud apoyada en los dos extremos, si una carga ω_0 está distribuida de modo uniforme a lo largo de su longitud.

$$\text{Solución: } u(x) = \frac{\omega_0}{24EI}x^4 - \frac{\omega_0}{12EI}x^3 + \frac{\omega_0}{24EI}x$$

3. Calcular la deflexión de una viga de 1 metro de longitud empotrada en el extremo izquierdo y apoyada en el derecho, si una carga ω_0 está distribuida de modo uniforme a lo largo de su longitud.

$$\text{Solución: } u(x) = \frac{\omega_0}{24EI}x^4 - \frac{5\omega_0}{48EI}x^3 + \frac{\omega_0}{16EI}x^2$$

4. Ejercicio resuelto con Maple

Hallar la expresión analítica de la curva de deflexión de una viga de longitud L empotrada en el extremo izquierdo y libre en el derecho suponiendo que $\omega(x) = \omega_0 \frac{L-x}{L}$. Para los valores $\omega_0 = 3EI$ y $L = 1/2$ representar gráficamente la curva y calcular la deflexión máxima.

En primer lugar, cargamos los paquetes necesarios:

```
> restart:with(plots):
```

La ecuación diferencial que hay que resolver es $u^{IV}(x) = \dfrac{\omega(x)}{EI}$; la definimos como

```
> u4:=x->(w0*(L-x)/(L*EI));
```

$$u4 := x \mapsto \frac{w0\ (L-x)}{L\,EI}$$

Integramos cuatro veces, añadiendo en cada una de ellas las constantes de integración A, B, C y D correspondientes.

```
> int(u4(x),x);
```

$$\frac{w0\left(Lx - \frac{1}{2}x^2\right)}{L\,EI}$$

```
> u3:=x->w0*(L*x-(1/2)*x^2)/(L*EI)+A;
```

$$u3 := x \mapsto \frac{w0\left(Lx - \frac{1}{2}x^2\right)}{L\,EI} + A$$

```
> int(u3(x),x);
```

$$\frac{w0\left(\frac{1}{2}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3\right)}{L\,EI} + Ax$$

```
> u2:=x->w0*((1/2)*L*x^2-(1/6)*x^3)/(L*EI)+A*x+B;
```

$$u2 := x \mapsto \frac{w0\left(\frac{1}{2}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3\right)}{L\,EI} + Ax + B$$

```
> int(u2(x),x);
```

$$\frac{w0\left(\frac{1}{6}Lx^3 - \frac{1}{24}x^4\right)}{L\,EI} + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx$$

```
> u1:=x->w0*((1/6)*L*x^3-(1/24)*x^4)/(L*EI)+(1/2)*A*x^2+B*x+C;
```

$$u1 := x \mapsto \frac{w0\left(\frac{1}{6}Lx^3 - \frac{1}{24}x^4\right)}{L\,EI} + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + C$$

```
> int(u1(x),x);
```

$$\frac{w0\left(\frac{1}{24}Lx^4 - \frac{1}{120}x^5\right)}{L\,EI} + \frac{1}{6}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx$$

```
> u:=x->w0*((1/24)*L*x^4-(1/120)*x^5)/(L*EI)+(1/6)*A*x^3+(1/2)*B*x^2+C*x+D;
```

$$u := x \mapsto \frac{w0\left(\frac{1}{24}Lx^4 - \frac{1}{120}x^5\right)}{L\,EI} + \frac{1}{6}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx + D$$

Una vez obtenida la solución general de la ecuación diferencial, $u(x)$, aplicamos las condiciones de contorno correspondientes al caso de una viga empotrada en un extremo y libre en el otro:

```
> solve({u(0)=0,u1(0)=0,u2(L)=0,u3(L)=0},{A,B,C,D});
```

$$\left\{A = -\frac{1}{2}\frac{w0\,L}{EI}, B = \frac{1}{6}\frac{w0\,L^2}{EI}, C = 0, D = 0\right\}$$

```
> subs(%,u(x));
```

$$\frac{w0\left(\frac{1}{24}Lx^4 - \frac{1}{120}x^5\right)}{L\,EI} - \frac{1}{12}\frac{w0\,Lx^3}{EI} + \frac{1}{12}\frac{w0\,L^2x^2}{EI}$$

```
> up:=x->w0*((1/24)*L*x^4-(1/120)*x^5)/(L*EI)-(1/12)*w0*L*x^3/EI+
(1/12)*w0*L^2*x^2/EI;
```

$$up := x \mapsto \frac{w0\left(\frac{1}{24}Lx^4 - \frac{1}{120}x^5\right)}{L\,EI} - \frac{1}{12}\frac{w0\,Lx^3}{EI} + \frac{1}{12}\frac{w0\,L^2x^2}{EI}$$

La expresión analítica de la función que describe la curva de deflexión viene dada por:

$$up(x) = \frac{\omega_0 \left(\frac{1}{24}Lx^4 - \frac{1}{120}x^5\right)}{L\,EI} - \frac{1}{12}\frac{\omega_0 L x^3}{EI} + \frac{1}{12}\frac{\omega_0 L^2 x^2}{EI},$$

en la que ahora sustituiremos los valores de ω_0 y L dados en el enunciado,

```
> subs({w0=3*EI,L=1/2},up(x));
```

$$\frac{1}{8}\,x^4 - \frac{1}{20}\,x^5 - \frac{1}{8}\,x^3 + \frac{1}{16}\,x^2$$

```
> flex:=x->(1/8)*x^4-(1/20)*x^5-(1/8)*x^3+(1/16)*x^2;
```

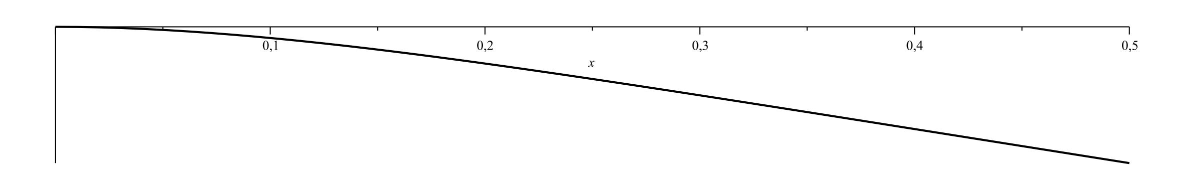
$$flex := x \mapsto \frac{1}{8}\,x^4 - \frac{1}{20}\,x^5 - \frac{1}{8}\,x^3 + \frac{1}{16}\,x^2$$

y obtenemos para este caso concreto la función

$$flex(x) = x \mapsto \frac{1}{8}\,x^4 - \frac{1}{20}\,x^5 - \frac{1}{8}\,x^3 + \frac{1}{16}\,x^2.$$

Su representación gráfica es:

```
> plot(-flex(x),x=0..1/2,color=black);
```



Obsérvese que dibujamos la función $flex(x)$ con signo negativo puesto que se considera el eje OY positivo hacia abajo.

El valor de la deflexión máxima se alcanzará en el extremo de la viga; esto es:

```
> evalf(flex(1/2));
```

$$0.006250000000$$

Ejercicios propuestos

1. Hallar la expresión analítica de la curva de deflexión de una viga de longitud L apoyada en ambos extremos suponiendo que $\omega(x) = \omega_0 x^2/L$ para los valores $\omega_0 = 4EI$ y $L = 2$. Representar gráficamente la curva.

$$\text{Solución: } u(x) = \frac{1}{180}x^6 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{32}{45}x.$$

2. Hallar la expresión analítica de la curva de deflexión de una viga de 1 metro de longitud empotrada en su extremo izquierdo y apoyada en el derecho suponiendo que $\omega(x) = (2 + 4\cos x)EI$.

$$\text{Solución: } u(x) = \frac{1}{12}x^4 + 4\cos x + \left(3\cos 1 - \frac{53}{24}\right)x^3 + \left(\frac{49}{8} - 7\cos 1\right)x^2 - 4.$$

3. Hallar la expresión analítica de la curva de deflexión de una viga de longitud L empotrada en el extremo izquierdo y libre en el derecho suponiendo que $\omega(x) = \omega_0 \operatorname{sen}(\pi x/L)$ para los valores $\omega_0 = 3EI$ y $L = 1/2$. Representar gráficamente la curva y calcular la deflexión máxima.

$$\text{Solución: } u(x) = \frac{3}{16}\frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{\pi^4} - \frac{1}{4}\frac{x^3}{\pi} + \frac{3}{8}\frac{x^2}{\pi} - \frac{3}{8}\frac{x}{\pi^3}.$$

Deflexión máxima: 0.01384720518.

Bibliografía

[1] D.G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Thomson Learning, 2002.

[2] A García, F. García, A. López, G. Rodríguez y A. de la Villa. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría y problemas* Ed. CLAGSA.

[3] A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.* Mir, 1992.

[4] W. Boyce di Prima. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Limusa, 1998.

[5] J.M. Gere, S.P. Timoshenko. *Mecánica de Materiales.* Grupo Editorial Iberoamérica. México D.F., 1984.

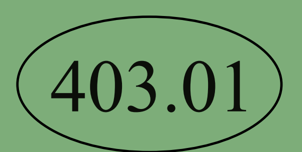
[6] F. Rincón, A. García, A. Martínez. *Cálculo Científico con MAPLE.* Ed. RA–MA.

[7] E. Patiño, P. Galán del Sastre. *Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden I. Algunos métodos de resolución.* Cuadernillos del Instituto Juan de Herrera de la E.T.S. Arquitectura de Madrid, 2012. Cuadernillo número 3-88-01.

[8] E. Patiño, P. Galán del Sastre. *Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden II. Algunas aplicaciones.* Cuadernillos del Instituto Juan de Herrera de la E.T.S. Arquitectura de Madrid, 2012. Cuadernillo número 3-88-02.

NOTAS

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

